**Prirodno-matematički fakultet**

**Društvo matematičara i fizičara Crne Gore**

# OLIMPIJADA ZNANJA 2018

Rješenja zadataka iz MATEMATIKE

za III razred srednje škole

**1.** Neka je $p$ realan broj takav da korijeni polinoma $x^3+2px^2-px+10$ čine aritmetičku progresiju. Naći te korijene.

**Rješenje:** Označimo korijene datog polinoma sa $a$, $b$ i $c$. Kako oni čine aritmetičku progresiju, to je $b = \frac{a+c}{2}$. Dalje, zadati polinom možemo zapisati u obliku

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = (x-a)\left(x - \frac{a+c}{2}\right)(x-c),$$

pa množeći članove na desnoj strani jednakosti dobijamo:

$$x^3 + 2px^2 - px + 10 = x^3 - \frac{3}{2}(a+c)x^2 + \left(\frac{(a+c)^2}{2} + ac\right)x - (a+c)\frac{ac}{2}.$$

Odavde je:
(a) $\frac{3}{2}(a+c) = -2p$,
(b) $\frac{(a+c)^2}{2} + ac = -p$,
(c) $(a+c)\frac{ac}{2} = -10$.
Iz jednakosti (a) i (c) dobijamo $\frac{ac}{3} = \frac{5}{p}$ i $a + c = -\frac{4p}{3}$. Uvrštavajući dobijene vrijednosti u jednakost (b) dobijamo polinom $16p^3 + 18p^2 + 270 = 0$, odnosno polinom $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Provjerom djelilaca slobodnog člana dobijamo da je $p = -3$ korijen ovog polinoma, pa je

$$8p^3 + 9p^2 + 135 = (p+3)(8p^2 - 15p + 45).$$

Diskriminanta polinoma $8p^2 - 15p + 45$ je $225 - 1440 = -1215 < 0$, pa on nema realnih korijena. Zaključujemo da je $p = -3$ jedini realni korijen polinoma $8p^3 + 9p^2 + 135 = 0$. Dakle, pošto je $p = -3$, iz (a) i (c) slijedi da je $a = -1$, $c = 5$, pa je $b = 2$. Dakle, traženi korijeni su $-1$, $2$, $5$. $\square$

**2.** Neka su $x, y, z > 0$ realni brojevi tako da važe sljedeći uslovi:

$$x^3y + 3 \leq 4z, \ \ y^3z + 3 \leq 4x, \ \ z^3x + 3 \leq 4y.$$

Dokazati da je tada $x = y = z = 1$.

**Rješenje:** Date nejednakosti su ekvivalentne sa $x^3y \leq 4z - 3$, $y^3z \leq 4x - 3$ i $z^3x \leq 4y - 3$, pa množeći izraze sa iste strane dobijamo

$$x^4y^4z^4 \leq (4x - 3)(4y - 3)(4z - 3). \ (1)$$

Primjenom nejednakosti između artimetičke i geometrijske sredine dobijamo

$$x^4 + 3 = (x^4 + 1) + 2 \geq 2x^2 + 2 = 2(x^2 + 1) \geq 4x,$$

tj. $x^4 \geq 4x - 3$, gdje jednakost važi samo za $x = 1$. Slijedi

$$x^4y^4z^4 \geq (4x - 3)(4y - 3)(4z - 3). \ (2)$$

Iz (1) i (2) i prethodnog zaključka dobijamo da je $x = y = z = 1$. □

**3.** Desetocifreni broj ćemo nazvati *magičnim* ako su mu sve cifre različite i djeljiv je sa 99999. Koliko ima magičnih desetocifrenih brojeva?

**Rješenje:** Neka je $\overline{abcdefghij}$ desetocifreni magični broj. Tada je

$$\overline{abcdefghij} = 10^5 \cdot \overline{abcde} + \overline{fghij} = 99999 \cdot \overline{abcde} + \overline{abcde} + \overline{fghij}.$$

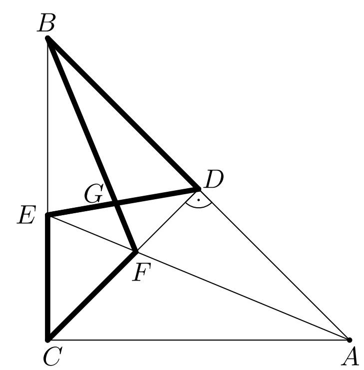
Slijedi da je zbir $\overline{abcde} + \overline{fghij}$ djeljiv sa 99999, pa kako je $\overline{abcde} < 99999$ i $\overline{fghij} < 99999$, to mora važiti

$$\overline{abcde} + \overline{fghij} = 99999.$$

Slijedi $a + f = b + g = c + h = d + i = e + j = 9$ (zbirovi se sastoje samo od devetki, nema prenosa). Dakle, treba naći koliko ima petocifrenih brojeva $\overline{abcde}$, čije su sve cifre različite, $a \neq 0$, tako da ne postoje dvije cifre čiji je zbir jednak 9. Cifru $a$ možemo izabrati na 9 načina; za već izabranu cifru $a$, cifru $b$ možemo izabrati na 8 načina, za izabrane cifre $a$ i $b$, cifru $c$ možemo izabrati na 6 načina; za izabrane cifre $a$, $b$ i $c$, za cifru $d$ imamo 4 mogućnosti, i najzad za izabrane $a, b, c, d$ imamo dvije mogućnosti za cifru $e$. Dakle, magičnih desetocifrenih brojeva ima $9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 3456$. □

**4.** Neka je $F$ tačka presjeka visine $CD$ i simetrale unutrašnjeg ugla kod tjemena $A$ pravouglog trougla $ABC$, $\angle ACB = 90^\circ$. Neka je $E$ tačka presjeka prave $AF$ i katete $BC$ i $G$ tačka presjeka duži $ED$ i $BF$. Dokazati da je površina četvorougla $CEFG$ jednaka površini trougla $BDG$.

**Rješenje:**




Prvo zapažamo da je $\triangle ABC$ sličan sa $\triangle ACD$, pa je $AC : AB = AD : AC$. Kako je $CE : EB = AC : AB$ i $DF : FC = AD : AC$ slijedi da je

$$CE \cdot FC = BE \cdot DF. \tag{1}$$

Dalje važi

$$P_{\triangle DBC} = P_{FGEC} + P_{\triangle DGF} + P_{\triangle DGB} + P_{\triangle GEB}. \tag{2}$$

S druge strane je

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2} BC \cdot CD \cdot \sin \angle BCD.$$

Koristeći (1) dobijamo da je

$$BC \cdot CD = (BE + EC) \cdot (CF + FD) = BE \cdot CF + BE \cdot FD + EC \cdot CF + EC \cdot FD =$$

$$= BE \cdot CF + CE \cdot FC + EC \cdot FC + EC \cdot FD = (BE + EC) \cdot CF + EC \cdot (CF + FD) =$$

$$= BC \cdot CF + EC \cdot CD$$

Zato je

$$P_{\triangle DBC} = \frac{1}{2}(BC \cdot CF + EC \cdot CD) \sin \angle BCD = P_{\triangle BCF} + P_{\triangle CED}. \tag{3}$$

Dalje je

$$P_{\triangle BCF} = P_{CFGE} + P_{\triangle BEG}, \;\; P_{\triangle CED} = P_{CFGE} + P_{\triangle FGD}.$$

Iz (2) i (3) slijedi da je

$$P_{CFGE} = P_{\triangle GBD}.$$

$\square$